

گراف‌های قطبی

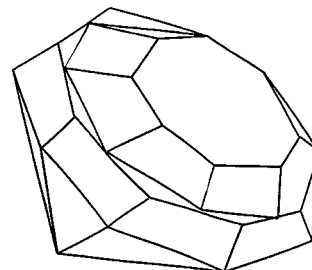
کلید واژه

گراف قطبی، لئونارد اویلر، ماتریس مجاورت

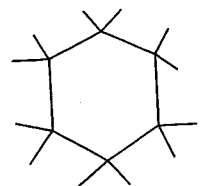
مقدمه

در ریاضیات «گراف‌ها» ابزاری برای بیان ارتباط بین عناصر یا نقاط هستند. هر چند که تئوری گراف‌ها اولین بار در سال ۱۷۳۶ توسط لئونارد اویلر، ریاضی‌دان سوئیسی برای حل مسئله «پل‌های کونیگسبرگ» طرح شد، ولی امروزه این شاخه ریاضی در علوم رایانه، علوم پایه، مدیریت حمل و نقل و تحقیق در عملیات به کار گرفته می‌شود. از طرف دیگر، در گراف‌ها نقاط به صورت فرضی در صفحه یا فضا در نظر گرفته می‌شوند و این موضوع باعث شده است گراف‌ها شکل واحدی نداشته باشند. در این مقاله تلاش شده است با تعریف مختصات قطبی هر نقطه، نقاط به صورت ثابت یا مجموعه نقاطی که حرکت آن‌ها دارای اصول خاصی است، در نظر گرفته شود.

با معرفی مختصات رئوس و ثابت فرض کردن آن‌ها می‌توان گراف‌ها را به کمک رایانه ترسیم کرد و در بعضی زمینه‌ها مانند ترسیم فرمول‌های مواد آلی در شیمی و محاسبه زاویه پیوند به کار برد. همچنین، برای رسم اشکال منتظم در محیط‌های برنامه‌نویسی نیز می‌توان از این روش استفاده کرد. برای مثال، با استفاده از این روش می‌توان شکل‌های ۱ و ۲ را رسم کرد و یک توصیف ریاضی برای آن‌ها نوشت.

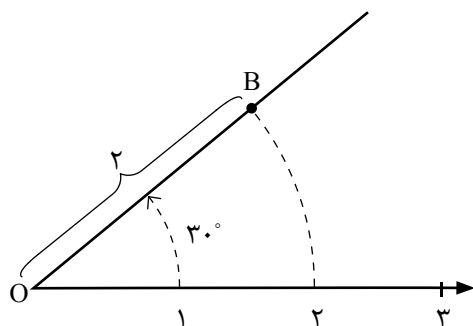


شکل ۲



شکل ۱

شکل ۳



در واقع در نظریه گراف‌ها، با توجه به ماتریس مجاورت یک گراف، می‌توانیم نموداری از این گراف رسم کنیم، اما با این اطلاعات نمی‌توان مکان هر رأس را تعیین کرد. بنابراین قصد داریم با استفاده از مختصات قطبی، ابتدا مکان هر رأس را مشخص سازیم و سپس با استفاده از ماتریس مجاورت، یال‌های مرتبط با آن رأس را تعیین کنیم.

مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی، یک دستگاه مختصات دوبعدی است که در آن مکان هر نقطه، با فاصله آن تا مرکز مختصات (r) و زاویه بین خط رسم شده از مرکز به آن نقطه و محور طول (θ) مشخص می‌شود. این دستگاه در فضای سه‌بعدی به دستگاه مختصات استوانه‌ای و دستگاه مختصات کروی تبدیل می‌شود. اولین استفاده‌های مشابه که به ایجاد کنونی این دستگاه انجامیده است، توسط **ابوریحان بیرونی** انجام شد.

نمایش نقاط

اگر O مبدأ مختصات باشد، نقطه A را به صورت زیر نمایش می‌دهیم (معادله ۱):

معادله ۱: $A: (X, \theta^\circ)$
این یعنی نقطه A ، X واحد به سمت راست و به اندازه θ درجه که با محور تشکیل زاویه داده است، از محور طول‌ها فاصله بگیرد.

مثال: مختصات قطبی نقطه B با توجه به شکل ۳ به این صورت است: معادله ۲: $B: (2, 30^\circ)$

مختصات قطبی هر نقطه از دو عدد تشکیل می‌شود که یکی فاصله و دیگری زاویه است. برای آنکه دچار ابهام نشویم، قرار می‌گذاریم زاویه‌ای را در نظر بگیریم که ضلع دوم آن با چرخش از روی ضلع اول برخلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت به دست آمده است.

آموزشی

سید احسان حسینی
دانش آموز سال سوم
رشته ریاضی،
دبیرستان باقر العلوم
شهرستان دره شهر (ایلام)

■ نظریهٔ گراف

نظریهٔ گراف شاخه‌ای از ریاضیات است که دربارهٔ گراف‌ها بحث می‌کند. این مبحث در واقع شاخه‌ای از توپولوژی است که با جبر و نظریهٔ ماتریس‌ها پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد. نظریهٔ گراف برخلاف شاخه‌های دیگر ریاضیات نقطهٔ آغاز مشخصی دارد و آن انتشار مقاله‌ای از لئونارد اویلر، ریاضی‌دان سوئیسی، برای حل مسئلهٔ پل‌های کونیگسبرگ در سال ۱۷۳۶ است.

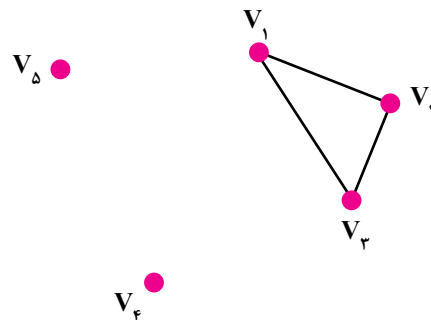
تعریف: گراف (ساده) G زوجی مرتب به صورت (V, E) است که در آن V مجموعهٔ متناهی و ناتمامی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است.

رسم نمودار گراف: هر گراف را می‌توان با یک نمودار موسوم به «نمودار گراف» نمایش داد. برای این کار به ازای هر رأس G یک نقطه در صفحه در نظر گرفته می‌شود و دو نقطه متمایز به وسیلهٔ یک پاره‌خط یا کمانی به هم وصل می‌شوند؛ به شرط آنکه مجموعهٔ متشکل از دو رأس، عضو مجموعهٔ E (یال‌ها) باشد.

مثال ۱. رسم نمودار گراف G با اطلاعات معادله‌های ۳ و ۴ به صورت شکل ۴ است.

$$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 = (x) \text{ ۳ معادله}$$

$$V_1, V_2, V_3, V_4 = (x) \text{ ۴ معادله}$$



شکل ۴

به رأس‌های V_1 و V_2 رأس‌های تنها گفته می‌شود. همچنین رأس‌های V_3 و V_4 مجاورند، چون بین آن‌ها رابطه وجود دارد. روابط میان رأس‌های یک گراف را می‌توان با کمک ماتریس بیان کرد. ما در این مقاله از ماتریسی موسوم به ماتریس مجاورت استفاده می‌کنیم.

ماتریس مجاورت: اگر $G = (V, E)$ گرافی با $V_1, V_2, \dots, V_n$ و $V_1, V_2, \dots, V_n = (x) \text{ ۴ معادله}$ باشد، ماتریس

مجاورت G عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ مانند: $A = (a_{ij})$ که در آن:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یالی بین رئوس } V_i \text{ و } V_j \text{ موجود باشد;} \\ 0 & \text{در غیر این صورت;} \end{cases}$$

برای مثال، ماتریس مجاورت گراف صفحه قبل به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ گراف قطبی

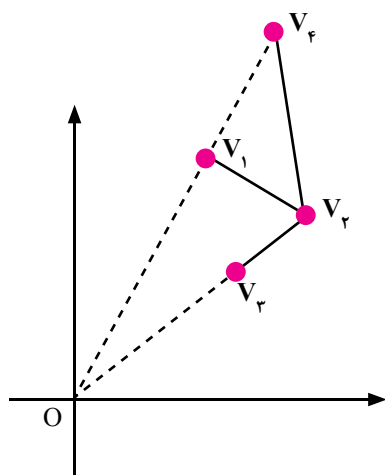
در نظریهٔ گراف‌ها مکان یک رأس تعیین نمی‌شود، لذا در رسم نمودار یک گراف تنها رعایت مجاور بودن یا نبودن رأس‌ها کافی است و مکان هندسی رأس‌ها در صفحه مشخص نمی‌شود. به همین دلیل، با استفاده از مختصات قطبی می‌توان ابتدا مکان هر رأس را مشخص کرد و سپس به کمک ماتریس مجاورت یا زوج‌های مرتب، یال‌های بین این نقاط را رسم کرد.

مثال ۱:

$$V_1: (15\text{cm}, 60^\circ), V_2: (15\text{cm}, 30^\circ), V_3: (10\text{cm}, 30^\circ)$$

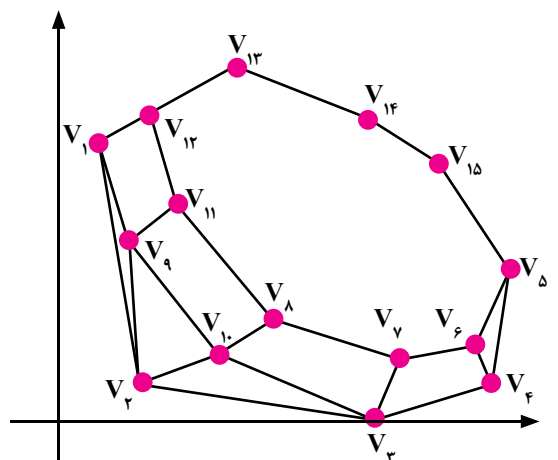
$$V_4: (20\text{cm}, 60^\circ)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



شکل ۵

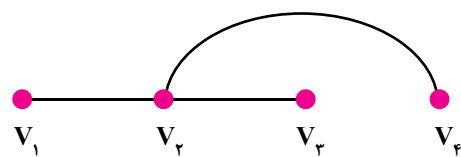
گراف شکل ۵ را بدون استفاده از مختصات قطبی و تنها با ماتریس مجاورت می‌توان به صورت شکل‌های ۶، ۷ ترسیم کرد.



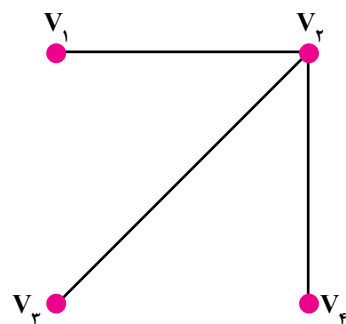
شکل ۸

نتیجه گیری

از گراف قطبی می توان در کنترل مجموعه ماهواره های مخابراتی، تعیین ایستگاه های آتش نشانی، تعیین پایگاه های امدادی اورژانس، ساخت بازی های رایانه ای، تدارک سرگرمی های علمی، تعیین ساختارهای مولکولی، تعیین تعداد ایزومرهای ترکیبات آلی، آموزش ریاضیات کاربردی و... استفاده کرد.



شکل ۶



شکل ۷

مثال ۲:

$$v_1: (1\text{cm}, 85^\circ), v_2: (2\text{cm}, 30^\circ), v_3: (8\text{cm}, 0^\circ)$$

$$v_4: (12\text{cm}, 5^\circ), v_5: (13\text{cm}, 20^\circ), v_6: (11\text{cm}, 10^\circ)$$

$$v_7: (8/25\text{cm}, 10^\circ), v_8: (8\text{cm}, 30^\circ), v_9: (2\text{cm}, 70^\circ)$$

$$v_{10}: (4\text{cm}, 30^\circ), v_{11}: (3\text{cm}, 65^\circ), v_{12}: (2/75\text{cm}, 80^\circ)$$

$$v_{13}: (8\text{cm}, 65^\circ), v_{14}: (7\text{cm}, 50^\circ), v_{15}: (9\text{cm}, 35^\circ)$$

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۳	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۶	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۷	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۸	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۹	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۱۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱۵	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰

